

EJERCICIOS REPASO: ROLLE, LAGRANGE, L'HOPITAL, OPTIMIZACIÓN

1. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} - 1)^{\frac{x}{x^2+1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+4)}{e^{x^2+3}}$$

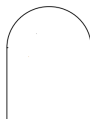
$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (tg(x) + x^2 + 1)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + e^{-x})^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{\ln x}{3} \right)$$

2. Se considera una ventana rectangular, en la que el lado superior ha sido sustituido por una semicircunferencia. El perímetro de la ventana son 8 m. Halla las dimensiones del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima.



3. Calcula los valores de a y b para que pueda aplicarse el teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + a & \text{si } x < 1 \\ bx + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

4. Queremos construir un prisma de base rectangular y altura 1m con un volumen de $9m^3$. El coste de construcción de cada m^2 de la base es de 50€, el de las caras laterales 40€ y el de la tapa 60€. Halla las dimensiones para que su coste sea mínimo. ¿Cuál es el coste total?

5. Sabemos que una función polinómica de grado 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$, tiene tangente horizontal en el punto $(2, 3)$ y se anula para $x = 0$.

6. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax(x+1) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

¿Para que valores de a puede aplicarse el teorema de Rolle a la función en el intervalo $[-1,1]$?

7. De la función: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $(1,0)$, la recta tangente en ese mismo punto es paralela a la recta de ecuación: $y = 3x + 3$ y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula los valores de a, b, c y d .

8. Demuestra que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ para cualquier valor de a . Encuentra el punto en el que se cumple dicho teorema.

9. ¿Existe algún punto de la gráfica $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$ en el que la recta tangente tenga la misma pendiente que la cuerda que une los puntos $(0,0)$ y $(\pi, 2\pi)$? Indica qué teorema garantiza su existencia y, en caso afirmativo, encuentra el punto que lo cumple.

10. Halla las dimensiones de una vasija con forma de cilindro cuyo volumen es $2m^3$, de forma que la cantidad de material usado para su construcción sea mínima.